Devoir surveillé 3

Consignes

- Cette épreuve contient **4 questions** équipondérées (durée : **1 h**)
- Toutes calculatrices autorisées.
- Expliciter vos solutions et raisonnements !

Rappels de trigonométrie

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$
$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \sin b \cos a$$

Dérivées des fonctions trigonométriques inverses

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

Exercice 1

a) Par un calcul de dérivée, montrer que la fonction

$$f(x) = \arcsin x + \arccos x$$

est constante, et préciser la valeur de la constante.

$f'(x) = 0$, $f(x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [-1, 1]$.

b) À l'aide d'un calcul de dérivée, simplifier l'expression $g(x) = \arcsin x - \arccos \sqrt{1-x^2}$.

Pour $x > 0$: $f'(x) = 0$, $f(x) = 0$. (Que peut-on dire pour $x < 0$?)

Exercice 2

Une idée pour calculer $\theta = \arccos \xi$, c'est-à-dire trouver un θ pour lequel $\cos\theta = \xi$:

a) En utilisant la formule d'Euler pour $\cos\theta$, vérifier que $z := e^{i\theta}$ est solution de $z^2 - 2\xi z + 1 = 0$.

ok

b) Résoudre cette équation pour z. Est-on avancé ?

On trouve $z = \cos\theta \pm i \sin\theta = e^{\pm i\theta}$.

Exercice 3

a) Linéariser $\sin^2\theta$.

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\theta$

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^\pi \sin^2\theta \, \mathrm{d}\theta$.

$\frac{\pi}{2}$

Exercice 4

a) Déterminer toutes les solutions complexes de $z^2 - 5iz - (7+i) = 0$.

$z = 1 + 3i$ ou $-1 + 2i$

b) En déduire toutes les solutions complexes de $w^8 - 5iw^4 - (7+i) = 0$.

$w = \pm 10^{1/8} e^{i\alpha},\ \pm i 10^{1/8} e^{i\alpha},\ \pm 5^{1/8} e^{i\beta},\ \pm i 5^{1/8} e^{i\beta}$ où $\alpha = \arctan 3$, $\beta = \pi - \arctan 2$.